***4.1. Характеристики потоков платежей***

***4.1.1. Основные понятия***

Операции с отдельными денежными суммами лежат в основе более сложных операций — операций с последовательностями таких сумм, распределенных во времени, т. е. с потоками платежей.

***Потоком платежей***называется последовательность денежных сумм, приуроченных к определенным моментам времени. Отдельные денежные суммы, являющиеся членами последовательности, называются ***членами потока***.

Потоки возникают, например, при реализации инвестиционного проекта, при погашении задолженности в рассрочку, при получении доходов по акциям или другим ценным бумагам, при выплате пенсий и т. д.

Потоки платежей классифицируются на регулярные и нерегулярные. Варианты потоков графически представлены на рис. 4.1-4.3.

В ***нерегулярном потоке***временные интервалы между членами потока могут иметь различную продолжительность. Кроме того, члены такого потока могут иметь различные знаки. Положительные члены обычно соответствуют поступлениям денежных сумм, отрицательные — затратам.

В ***регулярном потоке***промежутки времени между соседними выплатами имеют одинаковую длину и члены потока имеют один знак. Регулярные потоки называются также ***финансовыми рентами***.

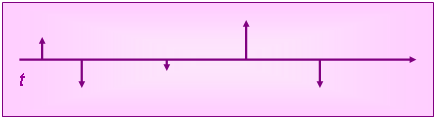


Рис. 4.1. Нерегулярный поток платежей

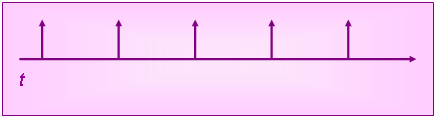


Рис. 4.2. Регулярный поток платежей (случай постоянной финансовой ренты)

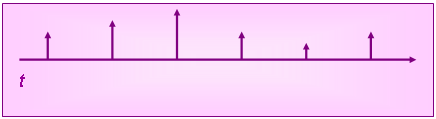


Рис. 4.3. Регулярный поток платежей (случай переменной финансовой ренты)

Отметим, что члены финансовой ренты в общем случае могут различаться по своей величине. Если они одинаковы, то говорят о ***постоянной***финансовой ренте. Если различаются, — то о ***переменной***финансовой ренте. Эти различия могут подчиняться какой-нибудь закономерности (например, ренты с постоянным абсолютным или относительным приростом членов) или быть несистематическими.

К основным параметрам, характеризующим ренту, относятся:

* ***член ренты*** — размер отдельного платежа;
* ***период ренты*** — длина интервала времени между соседними платежами;
* ***срок ренты*** — длина промежутка времени от начала первого периода до конца последнего периода;
* ***процентная ставка*** — та величина процентной ставки, на основе которой проводится анализ ренты.

При анализе конкретных рент используются и другие характеристики и параметры, например периодичность начисления процентов (при начислении несколько раз в году), вероятность выплаты (если речь идет о страховых платежах) и др.

Ренты могут иметь заранее оговоренный срок или не иметь такого срока. В последнем случае говорят о ***вечной ренте***.

Ренты различаются по моменту выплат в пределах периода. Если платежи приурочены к концу периодов, то рента называется ***рентой постнумерандо***(а также ***обыкновенной рентой***). Если же платежи приурочены к началу периодов, то рента называется ***рентой пренумерандо***.

***4.1.2. Обобщающие характеристики потоков платежей***

Два финансовых потока могут быть по-разному распределены во времени, иметь различную продолжительность, различное число членов, различаться величиной членов.

Их сопоставление, анализ, выбор варианта потока проводится на основе обобщающих характеристик, позволяющих свести все разнообразие потоков к небольшому числу базовых показателей.

К основной характеристике потока относится его приведенная стоимость (приведенная оценка). Она позволяет «свернуть» весь распределенный во времени поток в одно число.

Под ***приведенной стоимостью***понимается сумма всех членов потока с начисленными процентами, приведенная (дисконтированная) к какому-то заданному моменту времени. Обычно в качестве такого момента времени выбирают момент начала первого периода потока или момент окончания его последнего периода. В первом случае говорят о ***современной стоимости***(***современной оценке***) потока, во втором — о ***наращенной стоимости***(***наращенной сумме***) потока.

Иногда современную оценку потока привязывают не к его началу, а к некоторому более раннему моменту времени. Например, если сегодня анализируются потоки по вариантам инвестиционных проектов, реализация которых должна начаться через некоторое время, то современную оценку привязывают обычно не к началу потоков (у разных вариантов может быть разный начальный момент), а к сегодняшнему дню.

***4.1.3. Расчет приведенной стоимости потока***

Сформулируем определение приведенной стоимости потока в общем случае.

Пусть поток состоит из членов Rk, приуроченных к моментам времени tk. Определим стоимость этого потока, приведенную к произвольному моменту времени t.

Рассмотрим произвольный член потока Rk. Если соответствующий ему момент времени tk наступает раньше момента приведения t,

**tk < t,**

то при пересчете оценки величины Rk на момент t ее следует увеличить, умножив на коэффициент роста, равный http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-1.gif. Этот коэффициент показывает, во сколько раз изменится величина Rk по сложной процентной ставке i за время (t — tk), отделяющее момент tk от момента t.

Другими словами, если бы денежную сумму Rk положить на депозитный счет с условиями начисления сложных процентов по ставке i, то за время (t — tk) величина Rk выросла бы до величины Rkhttp://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-1.gif. Показатель степени положительный, так что коэффициент больше 1, величина Rk при умножении увеличивается.

Если же момент времени tk наступает позже момента t,

**tk** **> t**,

то при пересчете оценки величины Rk на момент t ее надо умножить на соответствующий коэффициент дисконтирования. Формула для этого коэффициента та же, что и для прежнего коэффициента роста, т. е. http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-1.gif. Однако показатель степени теперь отрицательный, так что коэффициент автоматически окажется менее 1. Величина Rk при умножении на такой коэффициент уменьшается.

Таким образом, независимо от того, как взаимно расположены моменты t и tk, при приведении члена потока Rk к моменту t его следует умножить на одно и то же выражение, равное http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-1.gif.

В одной ситуации это приводит к увеличению Rk, в другой — к уменьшению. Во всех ситуациях это приводит к корректному пересчету величины Rk, к ее приведению на момент времени t.

Приведенная стоимость всего потока St, приведенная на момент времени t по сложной процентной ставке i, определяется суммой результатов приведения всех членов потока, т. е. формулой

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-4.gif

Формула позволяет определить приведенную стоимость потока для любого момента времени t. В частности, если t — момент начала потока, то эта формула определяет современную стоимость потока. Если же t — момент окончания срока потока, формула определяет наращенную сумму потока.

***4.1.4. Связь между результатами приведения к разным моментам времени***

Рассмотрим, как изменяется величина приведенной стоимости при приведении к другому моменту.

Пусть t’ — другой момент приведения. Тогда при приведении к моменту t’ получим величину:

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-5.gif

Величины St и St’ связаны соотношением

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-6.gif

Рассмотрим отношение приведенных оценок:

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-7.gif

Отсюда получаем, что при приведении к более позднему моменту величина приведенной стоимости окажется больше. Действительно, если

**t’> t**,

то

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-8.gif

откуда следует, что

**St’ > St.**

Отношение приведенных оценок St’ / St выражается величиной, не зависящей от конкретного потока. Она зависит лишь от разности (t — t’) моментов приведения и от выбранной для приведения процентной ставки i.

Это позволяет сравнивать различные потоки по их приведенной стоимости безотносительно к выбору конкретного момента приведения.

Действительно, пусть http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-9.gif и http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-10.gif — стоимости двух потоков при их приведении к моменту t, а http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-11.gif и http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-12.gif — стоимости тех же потоков при их приведении к моменту t’. Тогда отношения этих оценок равны:

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-13.gif

Если приведенная стоимость одного потока оказалась в m раз больше приведенной стоимости другого при приведении обоих потоков к какому-то одному моменту времени, то это же соотношение между потоками сохранится и при приведении к любому другому моменту времени.

***4.2. Характеристики постоянной финансовой ренты***

***4.2.1. Расчет характеристик постоянной ренты***

Полученная выше формула приведенной стоимости потока пригодна для расчетов с любыми потоками. В некоторых важных частных случаях ее можно заметно упростить. Так, для наиболее распространенного вида потоков — постоянной финансовой ренты — мы получим существенно более простые расчетные формулы. Простые формулы можно получить и для переменных рент с несложной закономерностью изменения членов ренты.

Рассмотрим постоянную ренту, содержащую n членов одинаковой величины R (рис. 4.4). Интервал между членами ренты одинаков. Предположим, что он составляет 1 год (такая рента называется ***аннуитетом***). Пусть это рента постнумерандо.

Таким образом, перед нами последовательность из n одинаковых платежей размера R каждый. Общий срок ренты составляет n лет. Очередной платеж совершается в конце года. Первый платеж происходит в конце первого года, последний — в конце n-го года. Конец общего срока ренты совпадает с моментом последнего платежа.

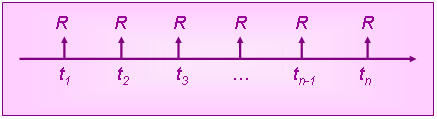


Рис. 4.4. Постоянная финансовая рента

Определим наращенную конечную стоимость ренты S, т. е. стоимость ренты на конец ее срока (конечную стоимость обозначают иногда также посредством FV — *Future Value*).

Приведение следует провести на момент окончания срока ренты. Рассмотрим поочередно члены ренты, от последнего к первому.

Последний, n-й член ренты при приведении сохраняется без изменения, поскольку момент приведения совпадает с моментом последнего платежа. В результате преобразования он сохраняет свою величину R.

Предпоследний, (n-1)-й член преобразуется в величину R(1 + i).

Предпредпоследний, (n-2)-й член преобразуется в http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-15.gif.

Продолжая рассуждения, получим, что произвольный k-й член преобразуется в http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-16.gif.

В частности, первый член преобразуется в http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-17.gif.

Суммируя получившуюся n-членную геометрическую прогрессию с первым членом R и знаменателем (1+i), приходим к формуле

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-18.gif

Это и есть формула конечной наращенной суммы постоянной n-членной ренты постнумерандо.

Обратимся к формуле начальной, современной стоимости ренты A, соответствующей приведению к начальному моменту срока ренты (такую величину обозначают также посредством PV — *Present Value*). Эту формулу можно получить двумя способами.

Один — провести рассуждения, аналогичные данным выше для формулы наращенной суммы, но ориентированные на приведение к другому моменту времени. Другой — провести дисконтирование уже полученной величины наращенной суммы к начальному моменту срока ренты, т. е. воспользоваться равенством

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-19.gif

Второй путь позволяет сразу написать итоговую формулу

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-20.gif

По этим формулам можно провести расчет при любой положительной величине процентной ставки i. Они не работают только при i = 0, т. е. в случае, когда не учитывается рост вложенной денежной суммы. Однако в этом случае современная и будущая оценки фонда совпадают, и обе равны простой сумме членов ренты:

**http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/5_R4_T4_1.gif**

***4.2.2. Вечная рента***

В некоторых случаях ренту можно рассматривать как продолжающуюся неограниченно долго, т. е. имеющую неограниченное число членов. Такая ситуация возникает, когда заранее срок ренты не установлен. Например, регулярные выплаты по облигациям с неограниченным сроком действия.

Ренты с неограниченным сроком называются ***вечными рентами***.

Определить наращенную сумму вечной ренты невозможно, т. к. такая сумма должна быть приведена к концу срока ренты. Однако можно определить современную стоимость вечной ренты. Для этого достаточно просуммировать бесконечную убывающую геометрическую прогрессию.

Если в полученной выше формуле для современной стоимости ренты со сроком n устремить n к бесконечности, то получим:

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-21.gif

Таким образом, современная стоимость вечной ренты определяется простым правилом: современная стоимость равна отношению величины члена ренты к процентной ставке.

***4.2.3. Связь параметров ренты***

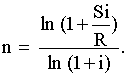
Полученные формулы позволяют рассчитать параметры ренты R и n через ее итоговые приведенные характеристики S и A. Простые преобразования приводят к формулам для члена ренты R:

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-22.gif

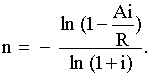
а также

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-23.gif

Формула для срока ренты n, выраженного через наращенную сумму S, имеет вид



Аналогичная формула для срока ренты n, выраженного через современную стоимость ренты A, имеет вид



Отметим, что числитель в последней формуле отрицателен (подлогарифмическое выражение меньше 1), так что знак «минус» перед формулой возвращает положительное значение n.

В отличие от R и n расчет процентной ставки i не удается провести в виде вычисления по готовой формуле. Величину процентной ставки определяют одним из методов приближенных вычислений (например, методом линейной интерполяции — методом хорд или методом Ньютона — методом касательных).

***4.2.4. Ренты пренумерандо и постнумерандо***

Рента пренумерандо при приведении к концу срока отличается от ренты постнумерандо сдвигом на один период времени от конца назад. Поэтому все ее члены при приведении следует дополнительно умножить на одну и ту же величину (1 + i). В результате формула наращенной суммы ренты пренумерандо примет вид

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-26.gif

Аналогично изменится и формула современной стоимости ренты:

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-27.gif

Соответствующие изменения произойдут в формулах, определяющих величину постоянного члена и продолжительность для ренты пренумерандо:

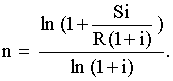
http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-28.gif

а также

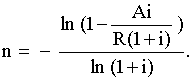
http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-29.gif

Полученные формулы можно рассматривать как формулы для ренты постнумерандо, но с новой оценкой приведенной стоимости (оценкой S или A), уменьшенной в (1+ i) раз.

Формула для срока ренты n, выраженного через наращенную сумму S, имеет вид



Аналогичная формула для срока ренты n, выраженного через современную стоимость ренты A, имеет вид



Полученные формулы соответствуют формулам для ренты постнумерандо, но с новой величиной члена ренты R, увеличенной в (1+ i) раз.

В дальнейшем мы будем строить формулы для ренты постнумерандо, имея в виду, что они легко преобразуются в формулы для ренты пренумерандо.

***4.3. Платежи и проценты***

***4.3.1. Учет особенностей начисления процентов***

Рассмотрим ситуацию, когда проценты на члены ренты начисляются не один, а несколько раз за период поступления платежей.

Пусть на поступающие члены постоянной ежегодной ренты постнумерандо начисляются проценты m раз в году (например, ежеквартально). Рассмотрим два варианта перевода годовой ставки в квартальную.

1. Пусть перевод годовой ставки i в квартальную j происходит по формуле сложной процентной ставки, т. е. по формуле

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-32.gif

В общем случае, при разделении года на m равных периодов, эта формула имеет вид

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-34.gif

В таком случае ставка i и ставка j корректно согласованы друг с другом, и все расчетные формулы, связанные с рентой, остаются прежними.

2. Пусть перевод годовой ставки i в квартальную j происходит по формуле простой процентной ставки, т. е. по формуле

**j = i/4**

или, в случае разделения года на m периодов, по формуле

**j = i/m.**

В этой ситуации множитель роста вклада за год равен величине

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-35.gif

При построении приведенной оценки ренты ее члены, как и в первоначальном случае, образуют геометрическую прогрессию, но с другим знаменателем — со знаменателем, равным множителю роста. Таким образом, для наращенной суммы получаем:

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-36.gif

Для современной стоимости потока получаем формулу

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-37.gif

***4.3.2. Учет особенностей поступления платежей***

Мы рассмотрели вариант, когда период начисления процентов меньше периода поступления платежей. Рассмотрим теперь противоположный случай, когда период поступления платежей меньше периода начисления процентов.

Пусть проценты начисляются ежегодно, а платежи поступают равными взносами, периодически, p раз в году (например, ежемесячно). Если годовая сумма платежей по-прежнему равна R, то отдельный платеж равен теперь величине R / p. Общее число членов ренты за n лет равно теперь nxp.

На каждый член ренты при определении наращенной суммы начисляются проценты за весь период времени, оставшийся до конца срока ренты.

Последовательность членов такой ренты с начисленными процентами опять является геометрической прогрессией. Первый член прогрессии (считая, как и раньше, от конца поступления платежей) равен R / p. Число членов равно np. Знаменатель прогрессии есть

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-38.gif

Наращенная сумма S есть сумма членов этой прогрессии Она определяется формулой

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-39.gif

Современная стоимость ренты определяется формулой

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-40.gif

***4.3.3. Учет особенностей начисления процентов и поступления платежей***

Рассмотрим вариант ренты, когда и начисление процентов, и поступление платежей происходят несколько раз в году. Обычно в таких ситуациях оба события происходят с одинаковой периодичностью. Например, рентные платежи поступают ежемесячно, и начисление процентов происходит также ежемесячно.

Расчеты по такой ренте сводятся к расчетам по первоначальной формуле с заменой годового периода новым периодом (например, месячным). При этом число членов ренты кратно числу лет, а процентная ставка изменяется в соответствии с новым периодом.

***Выводы***

Финансовая рента — это последовательность платежей, возникающих через равные промежутки времени. Если размеры платежей финансовой ренты одинаковы, то рента называется постоянной финансовой рентой.

Различают ренты постнумерандо (платежи поступают в конце промежутков времени) и ренты пренумерандо (платежи поступают в начале промежутков времени).

Конечная стоимость ренты S и начальная стоимость ренты A определяются путем приведения всех платежей к конечному или начальному моменту времени по сложной процентной ставке. Итоговые формулы получаются на основе суммирования геометрической прогрессии. Для ренты постнумерандо формулы имеют вид

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-41.gif

Формула начальной стоимости ренты применима и для вечной ренты, содержащей бесконечное множество платежей:

http://eos.ibi.spb.ru/umk/6_6/5/pict/4-42.gif